4.Übung ALP 1
Sebastian Quick / Ewa Kampa
Gruppe fr9

<u>Aufgabe1:</u> $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

a)

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = f(x-1) + 2x - 1 \quad \textit{für } x > 0$$

Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9
$\vdots$	$\vdots$

$zz : f(x) = x^2$

Beweis per Induktion nach x:

<u>Induktionsanfang:</u> für $x = 1$ gilt:

$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f(1) = f(0) + 2*1 - 1 = 1$$

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> für ein $x \in \mathbb{N}$ gelte:

$$f(x) = x^2$$

<u>Induktionsschluss:</u> zz: Dann gilt auch:

$$f(x+1) = (x+1)^2$$

Es gilt:

$$f(x+1) \overset{def}{=} f(x) + 2x + 1$$
$$\overset{IV}{=} x^2 + 2x + 1$$
$$\overset{Binomi}{=} (x+1)^2$$

∞

b)

$$f(0)=1$$
$$f(1)=1$$
$$f(x)=2f(x-2) \quad \textit{für } x>1$$

Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	1
1	1
2	2
3	2
4	4
5	4
$\vdots$	$\vdots$

$$f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} & \textit{für x gerade} \\ 2^{\frac{x-1}{2}} & \textit{für x ungerade} \end{cases}$$

Beweis per Induktion nach x:

<u>Induktionsanfang:</u> für $x=2$ gilt:

$$f(2)=2^1=2$$
$$f(2)=2f(0)=2*1=2$$

für $x=3$ gilt:

$$f(3)=2^1=2$$
$$f(3)=2f(1)=2*1=2$$

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> für ein $x\in\mathbb{N}$ gelte:

$$f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} & \textit{für x gerade} \\ 2^{\frac{x-1}{2}} & \textit{für x ungerade} \end{cases}$$

<u>Induktionsschluss:</u> zz: Dann gilt auch:

$$f(x+2)=\begin{cases} 2^{\frac{x+2}{2}} & \textit{für x gerade} \\ 2^{\frac{x+2-1}{2}} & \textit{für x ungerade} \end{cases}$$

Es gilt:

1.Fall: x gerade, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x+2) &\overset{def}{=} 2f(x) \qquad\qquad \textit{für } x>1 \\
&\overset{IV}{=} 2*2^{\frac{x}{2}} \\
&= 2^{\frac{x+2}{2}}
\end{aligned}
$$

2.Fall: x ungerade, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x+2) &\overset{def}{=} 2f(x) \qquad\qquad \textit{für } x>1 \\
&\overset{IV}{=} 2*2^{\frac{x-1}{2}} \\
&= 2^{\frac{x+1}{2}}
\end{aligned}
$$

∞