##
Tutor: Till Zoppke ALP Übungsbogen 4 Abgabe: 21.11.02
Annika Imme Maria Gensel
Gruppe: Do4
##

Aufgabe 3

Die Funktionen

- $S : N \to N, \quad n \mapsto n+1$ (Nachfolgerfunktion)
- $V : N \to N, \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ n-1 & sonst \end{cases}$ (Vorgängerfunktion)
- $plus : N^2 \to N, \quad (n,m) \mapsto n+m$ (Addition)
- $md : N^2 \to N, \quad (n,m) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } m > n \\ n-m & sonst \end{cases}$ (modifizierte Differenz)
- $\mathrm{sgn} : N \to N, \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & sonst \end{cases}$ (Signum-Funktion)

wurden bereits in der Vorlesung definiert.

a) Multiplikation

$mul : N^2 \to N, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$

$mul(0, x_1) = 0 = g(x_1)$
$mul(x+1, x_1) = f(x, mul(x, x_1), x_1)$

wobei $f(a,b,c) = plus(P_{3,2}(a,b,c), P_{3,3}(a,b,c))$
und $g(x_1) = k_0^1(x_1)$

b) Fakultätsfunktion

$$fak : N \to N, \quad n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} i & sonst \end{cases}$$

$fak(0) = g(\ )$
$fak(x+1) = f(x, fak(x))$

wobei $f(a,b) = mul(S(P_{2,1}(a,b)), P_{2,2}(a,b))$
und $g(\ ) = k_1^0(\ )$

c) Modulo-Funktion

$$\mathrm{mod}: \mathrm{N}^2 \to \mathrm{N}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{für } y=0 \\ x - y \cdot \lfloor x/y \rfloor & \textit{sonst} \end{cases}$$
$$\mathrm{mod}(0, x_1) = g(x_1)$$
$$\mathrm{mod}(x+1, x_1) = f(x, \mathrm{mod}(x, x_1), x_1)$$

wobei $f(a,b,c)$ = $\mathrm{abstand}\left(S(P_{3,1}(a,b,c)), (mul(div(S(P_{3,1}(a,b,c)), P_{3,3}(a,b,c)), P_{3,3}(a,b,c)))\right)$

und $g(x_1) = k_0^1(x_1)$

Die Hilfsfunktion *abstand* definieren wir durch Substitution:

$$\mathrm{abstand}: \mathrm{N}^2 \to \mathrm{N}, \quad (x,y) \mapsto |x - y|$$
$$\mathrm{abstand}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = plus(md(x,y), md(y,x))$$

d) Division

Die Division leiten wir zunächst mittels Substitution auf eine Hilfsfunktion *div'* zurück:

$$div: \mathrm{N}^2 \to \mathrm{N}, \quad (x,y) \mapsto \lfloor x/y \rfloor$$
$$div(x, x_1) = div'(S(x), x, x_1)$$

$$div'(0, x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$$
$$div'(x+1, x_1, x_2) = f(x, div'(x, x_1, x_2), x_1, x_2)$$

wobei

$$f(a,b,c,d) = if\left(kleinglei(mul(P_{4,1}(a,b,c,d), P_{4,4}(a,b,c,d)), P_{4,3}(a,b,c,d)), P_{4,1}(a,b,c,d), P_{4,2}(a,b,c,d)\right)$$
$$g(a,b) = k_0^2(x_1, x_2)$$

Die Hilfsfunktion *kleinglei* definieren wir durch Substitution:

$$kleinglei: \mathrm{N}^2 \to \mathrm{N}, \quad (m,n) \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{für } m \le n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$
$$kleinglei(m,n) = \mathrm{sgn}(md(S(n), m))$$

Die Hilfsfunktion *if* definieren wir mit Rekursion:

$$if: \mathrm{N}^3 \to \mathrm{N}, \quad (a,b,c) \mapsto \begin{cases} b & \textit{für } a > 0 \\ c & \textit{für } a = 0 \end{cases}$$
$$if(0, y, z) = g_{if}(y, z)$$
$$if(x+1, y, z) = f_{if}(x, if(x,y,z), y, z)$$

wobei $g_{if}(y,z) = P_{2,2}(y,z)$

und $f_{if}(a,b,c,d) = P_{4,3}(a,b,c,d)$