==

Alp 1 - WS 02/03 (Tutorium: Till Zoppke)
Monika Budde / Emrah Somay
Uebung 5, Aufg. 1

a) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(n) = 1$, falls n Primzahl, und 0 sonst
Zu zeigen: $p(n) = \min\{x \mid f(x, n) = 0$ und für alle $x' < x$ ist $f(x',n)$ definiert$\}$
$= \mu f(n)$

Wir benutzen die im Tutorium definierte Funktion „kleinster echter Teiler" (klt).
Ist n Primzahl, dann gilt $n = klt(n)$, also $(klt(n) + 1) \dot- n = 1$. Ist $n > 1$ keine Primzahl, dann ist $klt(n) < n$, also $klt(n)+1 <= n$ und somit $(klt(n) + 1) \dot- n = 0$. Für $n = 0, 1$ verwenden wir den Trick aus dem Tutorium und addieren $k_2 \dot- n$, denn $k_2 \dot- n = 0$ für $n > 2$, und $k_2 \dot- n > 0$ für $n = 0, 1$. Damit ist $klt(n + (k_2 \dot- n)) = klt(Add(n, md(k_2, n)))$ = auf ganz $\mathbb{N}$ definiert.
Wir definieren daher:
$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$$f(a,n) = (((klt(n + (k_2 \dot- n)) + 1) \dot- n) \dot- a) = md(((klt(Add(n, md(k_2, n))) + 1) \dot- n), a)$$
$$= md(md(klt(Add(n, md(k_2, n))) + 1, n), a)$$
$$= md(md(Add(klt(Add(n, md(k_2, n))), k_1), n), a)$$
Also entsteht f durch Substitution aus primitiv-rekursiven und µ-rekursiven Funktionen, und da $f(x',n)$ für alle $x' < x$ definiert ist, für die $f(x,n)$ definiert ist, ist $p = \mu f$ eine µ-rekursive Funktion.

b) $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(n)$ = Anzahl der Dezimalstellen von n
$= \min\{m \mid n+1 \leq 10^m$ und $n > 0$, oder $m = 1$ und $n = 0\}$
$= \min\{m \mid (n + 1) \dot- 10^m = 0$ und $n > 0$, oder $m = 1$ und $n = 0\}$
$= \min\{m \mid ((n + 1) \dot- 10^m) + (k_1 \dot- m) = 0\}$
Es gilt:
$n \geq 0, m = 0 \Rightarrow ((n + 1) \dot- 10^m) + (k_1 \dot- m) = ((n + 1) \dot- 1) + 1 = n + 1 > 0$
$0 \leq n < 10^1, m \geq 1 \Rightarrow ((n + 1) \dot- 10^m) + (k_1 \dot- m) = ((n + 1) \dot- 10) + 0 = 0 + 0 = 0$
$10 \leq n < 10^2, m \geq 2 \Rightarrow ((n + 1) \dot- 10^m) + (k_1 \dot- m) = 0$
usw.
Zu zeigen:
$s(n) = \min\{m \mid f(m,n) = 0$, und $f(m',n)$ ist für alle $m' < m$ definiert$\}$
$= \mu f(n)$
Wir definieren:
$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$$f(m,n) = ((n + 1) \dot- 10^m) + (k_1 \dot- m)$$
$$= Add((n + 1) \dot- 10^m, (k_1 \dot- m))$$
$$= Add(md(Add(n,1), exp(k_{10},m)), md(k_1,m))$$
f entsteht also durch Substitution aus primitiv rekursiven Funktionen, und da $f(x',n)$ für alle $x' < x$ definiert ist, für die $f(x,n)$ definiert ist, ist $s = \mu f$ eine µ-rekursive Funktion.