ALP III - Übung 5

Von : Marina Lehniger / Jörn Becker
Tutor : Till Zoppke

Aufgabe 29b)

<u>Zu zeigen ist:</u>
In einem vollen binären Baum, mit n Blättern auf Tiefe $l_1, \ldots, l_n$, gilt die folgende Gleichung.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$$

Beweis durch Induktion.

<u>Induktions-Anfang:</u> $n=1$

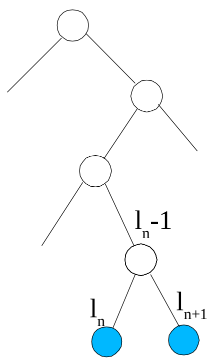
$$\Rightarrow 2^{-0} = 1$$

<u>Induktions-Voraussetzung:</u>

für einen Baum mit n Blättern gilt: $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$

<u>Induktions-Schritt:</u> $n \rightarrow n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-l_i} + 2^{-l_n} + 2^{-l_{n+1}}$$



die Knoten n und (n+1) sind Geschwister

und haben somit die gleiche Höhe.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-l_i} + 2^{-(l_n - 1)}$$

für $i = 1, \ldots, n-1$ setzen wir nun $l_i' = l_i$ und $l_n' := (l_n - 1)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i'} = 1}_{nach\ Induktions-Voraussetzung}$$