5. Übung
Algorithmen und Programmierung III
Tutor: Till Zoppke

David Kaltschmidt & Benjamin Schröter

16. Februar 2004

Aufgabe 29

b)

Beweisen Sie, dass in einem vollen binären Baum mit n Blättern auf Tiefe $l_1, \ldots, l_n$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$$

Ich definiere die Funktion f : Knoten $\rightarrow \mathbb{N}$ wie folgt:

$$f(K) = 2^{-t_K} \text{ falls K ist ein Blatt}$$

$$f(K) = f(K_1) + f(K_2) \text{ falls K kein Blatt}$$

wobei K_1 und K_2 die beiden Kinder von K sind und t_K die Tiefe von K.

Annahme: Für *jeden* Knoten K in einem vollen binären Baum gilt: $f(K) = 2^{-t_K}$:
Beweis durch Induktion über die Tiefe t:
Induktionsanker:
Falls K ein Knoten mit maximaler Tiefe ist, dann ist K ein Blatt und die Annahme trifft per Definition zu.
Induktionsschritt $t \mapsto t-1$:

- Falls der Knoten K_t ein Blatt ist: $f(K_t) = 2^{-t}$ (per Definiton)
- Ansonsten ist K_t ein innerer Knoten: Da es sich um einen vollen binären Baum handelt, hat K_t genau zwei Kinder. K_t hat die Tiefe t und seine beiden Kinder K_1 und K_2 haben die Tiefe $t_{K_1} = t_{K_2} = t+1$. Nach Induktionsannahme folgt daher:

$$f(K_t) = f(K_1) + f(K_2) = 2^{-t_{K_1}} + 2^{-t_{K_2}} = 2 \cdot 2^{-t+1} = 2^{-t}$$

Somit ist die Annahme bewiesen!

Diese Funktion kann nun verwendet werden um $g = \sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i}$ zu berechnen. Die Wurzel W hat die Tiefe 0:

$$f(W) = 2^0 = 1$$

Die Funktion f beschreibt das selbe wie g: Es wird für jedes Blatt auf der Tiefe l_i der Wert 2^{-l_i} zu der Summe addiert. Anstatt dies als Summe zu schreiben, kann es natürlich wie in der Definition von f auch rekursiv geschehen. Der Wert der Blätter wird ebenfalls mit 2^{-l_i} festgesetzt ($f(K) = 2^{-t_K}$) und das Addieren aller Blätter wird rekursiv über alle Knoten bis zur Wurzel durchgeführt.

Die beiden Funktionen f und g liefern also für die Wurzel eines Baumes den selben Wert!
$f(W) = 1$ ebenso wie die Annahme, dass $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$ ist. Damit ist auch diese Annahme bewiesen. q.e.d.

Aufgabe 33

Geben Sie ein Beispiel eines 2-3-Baums mit Höhe $h = 6$ an, bei dem man ein Element entfernen kann, sodass man mit dem Umbau des Baumes in Tiefe 4 aufhören kann, aber dennoch den gesamten Weg zur Wurzel durchlaufen muss, um die Schlüssel richtigzustellen.
Wenn in dem angegebenem Baum das Element 100 gelöscht werden soll, muss bis zur Tiefe 4 die Struktur des Baums umgebaut werden. Allerdings muss der gesamte Weg bis zur Wurzel durchlaufen werden, da sogar noch der Schlüssel in der Wurzel richtig gestellt werden muss: